Robot esférico no holonómico capaz de contender con superficies inclinadas con pendiente variable y superficies suaves

Sergio Daniel Sánchez Solar, Angélica Muñoz Melendez,
Gustavo Rodríguez Gómez

Reporte Técnico No. CCC-19-001
Enero, 2019

© Coordinación de Ciencias Computacionales
INAOE

Luis Enrique Erro 1
Sta. María Tonantzintla,
72840, Puebla, México

Robot esférico no holonómico capaz de contender con superficies inclinadas con pendiente variable y superficies suaves

Sergio Daniel Sánchez Solar

Asesores:

Angélica Muñoz Meléndez

Gustavo Rodríguez Gómez

Coordinación de Ciencias Computacionales

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Resumen

Los robots móviles terrestres son comúnmente utilizados en áreas de difícil acceso para la gente, tales como zonas de desastre o incluso para realizar exploración planetaria. Los vehículos que utilizan ruedas y los robots que se mueven utilizando extremidades presentan ciertas desventajas al desplazarse en este tipo de entorno, por ejemplo, suelen volcarse en superficies irregulares además de que en ocasiones sus componentes se encuentran expuestos a distintos factores tales como polvo, humedad o daños ocasionados por colisiones. Los robots esféricos impulsados por péndulo resultan ser una buena alternativa para contender con este tipo de problemas ya que, al estar cubiertos por una estructura externa sus componentes se encuentran protegidos contra los factores antes mencionados, por lo que pueden desplazarse en ambientes hostiles, además de que debido a que su medio de propulsión consta de un péndulo unido a un eje que está sujeto a dos extremos de la esfera y a su morfología no pueden volcarse. A pesar de estas ventajas, los robots esféricos impulsados por péndulo suelen tener dificultades para moverse en terrenos irregulares como aquellos que combinan una pendiente de inclinación tanto ascendente como descendente y que además es variable. Adicionalmente a esto, en los trabajos previos se considera que el robot se desplaza exclusivamente por superficies totalmente rígidas, aunque en la práctica esta condición no se cumple.

En esta propuesta de investigación se propone modificar el modelo básico de un robot esférico impulsado por un péndulo central que permita al sistema contender con estas dificultades, es decir, con planos inclinados con pendiente variable cuya superficie es suave y se deforma ligeramente debido al peso del robot y se produzcan abultamientos, además de implementar técnicas avanzadas de control que permitan controlar tanto la posición como la velocidad del movimiento del robot esférico.

Palabras clave

Robot esférico no holonómico, plano inclinado, pendiente variable, superficies suaves.

Índice

Resumen **i**

Lista de Figuras **v**

1 Introducción **1**
1.1 Antecedentes 1
1.2 Motivación 5
1.3 Problema de investigación 6
1.4 Preguntas de investigación 7
1.5 Objetivos 8
1.5.1 Objetivo general 8
1.5.2 Objetivos específicos 8
1.6 Hipótesis 8
1.7 Contribuciones esperadas 8
1.8 Resumen de la metodología 10
1.8.1 Modelo matemático 10
1.8.2 Control 11
1.8.3 Simulación 11

2 Marco teórico **11**
2.1 Cabeceo, alabeo y guiñada 11
2.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange 11
2.3 Control 14
2.3.1 Función de transferencia 14
2.3.2 Representación en espacio de estados 14
2.3.3 Control PID 15
2.3.4 Control realimentado de estados 15

3 Trabajo relacionado **18**
3.1 Movimiento en plano inclinado 18
3.1.1 BYQ-III 18
3.1.2 BYQ-VIII 18
3.1.3 Robot esférico en plano inclinado 18
3.2 Robot esférico en plano inclinado variable 20
3.3 Robot esférico en superficies suaves 20

4 Modelo propuesto **20**
4.1 Movimiento longitudinal 21
4.1.1 Control del movimiento longitudinal 22
4.2 Movimiento en plano inclinado con superficie suave 26
4.3 Ángulos máximos del plano inclinado 29
4.4 Altura máxima de las deformaciones de la superficie 30

5 Resultados preliminares **32**
5.1 Análisis de estabilidad de un robot esférico impulsado por péndulo . . . 32

6 Consideraciones finales **43**
6.1 Conclusiones 43
6.2 Actividades por realizar 45

7 Cronograma de actividades **45**

Bibliografía **47**

Lista de Figuras

1 Taxonomía de los robots móviles 1
2 Robots móviles terrestres con extremidades 2
3 Robots móviles terrestres impulsados por ruedas 3
4 Robots móviles terrestres impulsados por oruga 4
5 Robot esférico impulsado por rueda de hámster 5
6 Robot esférico impulsado por cambio de masas 6
7 Robot esférico impulsado por péndulo 7
8 Metodología propuesta 10
9 Ángulos que representan los movimientos de cabeceo (ϕ), alabeo (θ) y guiñada (ψ) 12
10 Sistema de un grado de libertad. 13
11 Planta con realimentación de estados. 16
12 BYQ-III 19
13 BYQ-VIII 19
14 Robot esférico en plano inclinado 20
15 Modelo del robot esférico (Movimiento longitudinal) 21
16 Respuesta del sistema a un escalón unitario (Suministro de voltaje) . . 25
17 Modelo del robot esférico (Plano inclinado variable con superficie suave) 26
18 Relación entre ángulo y tangente del plano inclinado 31
19 Análisis de estabilidad del robot esférico desarrollado por Nagai (2008) 33
20 Análisis de estabilidad del robot esférico desarrollado por Roozegar & Mahjoob (2016) 34
21 Modelo del robot esférico en un plano inclinado (Nagai, 2008) 35
22 Respuesta del sistema al escalón unitario 39
23 Comportamiento del ángulo θ_1 y velocidad angular $\dot{\theta_1}$ 39
24 Comportamiento del ángulo θ_2 y velocidad angular $\dot{\theta_2}$ 40
25 Modelo del robot esférico en un plano inclinado (Roozegar & Mahjoob, 2016) 40
26 Respuesta del sistema al escalón unitario 43
27 Comportamiento del ángulo θ y velocidad angular $\dot{\theta}$ 44
28 Comportamiento del ángulo β y velocidad angular $\dot{\beta}$ 44
29 Cronograma de actividades 46

1 Introducción

1.1 Antecedentes

Los robots móviles son comúnmente utilizados para realizar tareas que representan riesgos para los humanos o para llegar a zonas de difícil acceso, como pueden ser aquellos lugares afectados por desastres naturales o intencionales e incluso para realizar exploración planetaria. De forma general, los robots móviles autónomos son capaces de desplazarse en entornos que se conocen parcialmente e incluso en entornos completamente desconocidos. Este tipo de robots se pueden dividir en diferentes categorías de acuerdo al ambiente en el que operan. En la figura 1 se presenta una breve taxonomía de los robots móviles, haciendo especial énfasis en los robots móviles terrestres, que es en donde se ubican los robots esféricos.

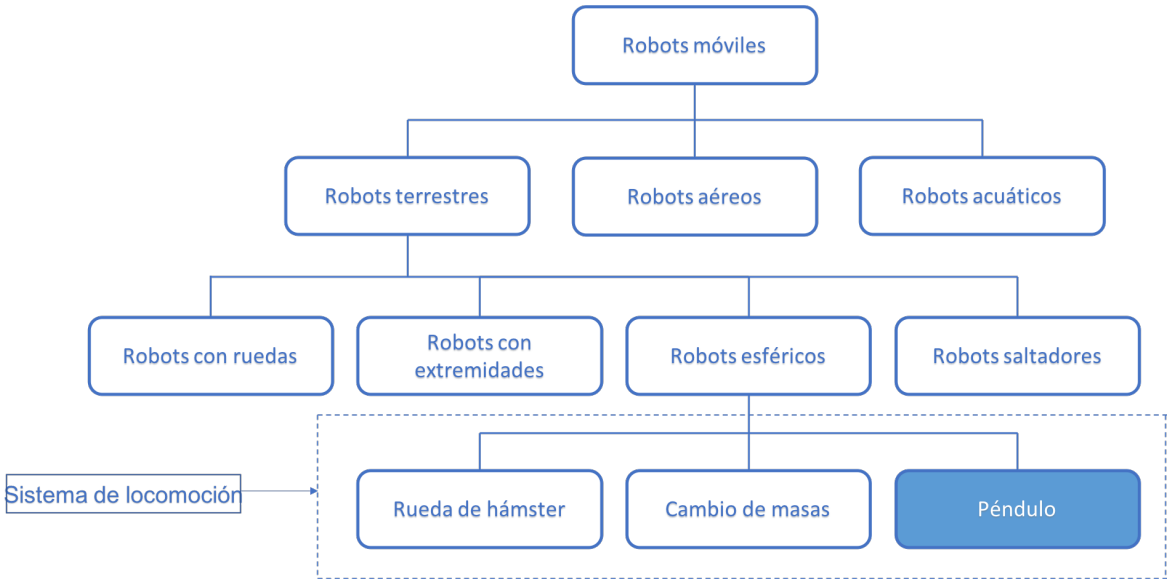
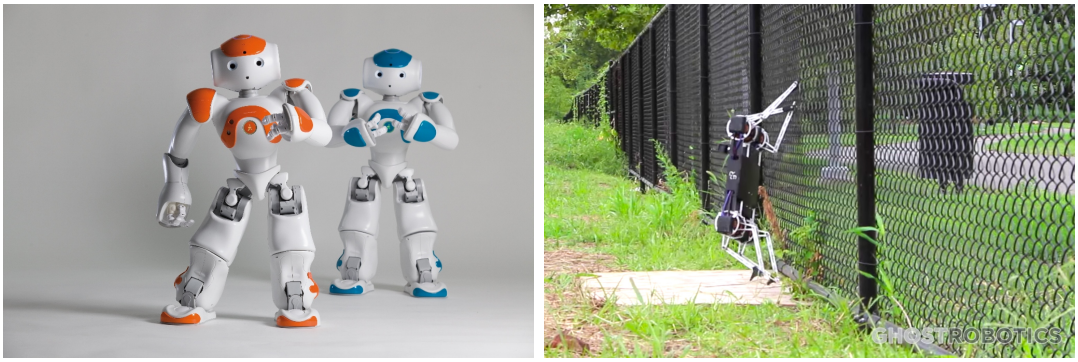


Figura 1: Taxonomía de los robots móviles. En la caja color azul se encuentra este trabajo de investigación

Los robots móviles terrestres se clasifican principalmente en:

Robots con extremidades

Las patas son consideradas un elemento biológico ya que es el modo de locomoción de la mayor parte de los animales e incluso de los seres humanos, este hecho ha permitido desarrollar robots móviles capaces de moverse en un entorno con obstáculos o en superficies irregulares y para garantizar su estabilidad generalmente se utilizan cuatro patas, aunque este número suele variar de acuerdo al diseño de cada robot móvil (Tzafestas, 2013), por lo que es común encontrar robots bípedos capaces de realizar tareas complejas, tales como caminar, correr o brincar.
Un ejemplo de los robots bípedos son los robots humanoides, como el que se muestra en la figura 2(a), que están basados en la morfología del cuerpo humano y con los cuales se busca imitar las funciones que realizamos los seres humanos de una forma autónoma. Existen otros robots que utilizan más patas y que son capaces de desarrollar otras tareas, por ejemplo escalar como el robot que se muestra en la figura 2(b).

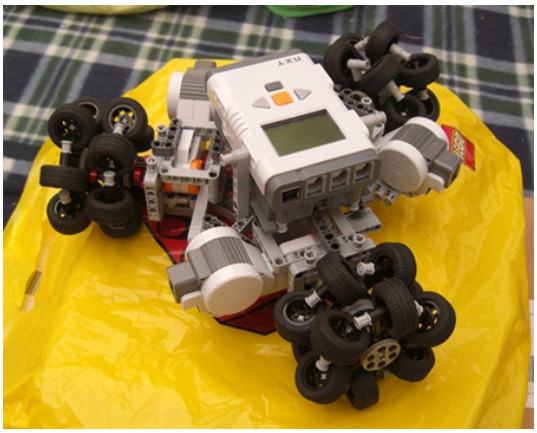


(a) Robot bípedo Nao© (b) Robot Ghost Minotaur©

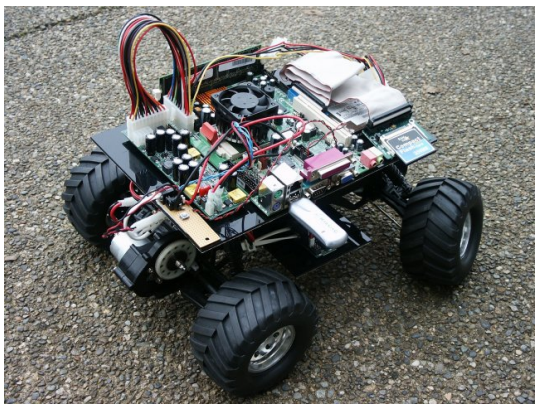
Figura 2: Robots móviles terrestres con extremidades

Robots con ruedas

Otro mecanismo muy común para realizar la locomoción de los robots móviles son las ruedas, dependiendo del tipo de motores y ruedas que se utilicen para realizar el movimiento los robots móviles pueden tener hasta tres grados de libertad. Los principales problemas que se presentan en el diseño de los robots impulsados por ruedas son la tracción, la maniobrabilidad, la estabilidad y la controlabilidad (Tzafestas, 2013). En la figura 3 se muestran algunos robots impulsados por ruedas.



(a) Robot holonómico impulsado por ruedas



(b) Robot no holonómico impulsado por ruedas

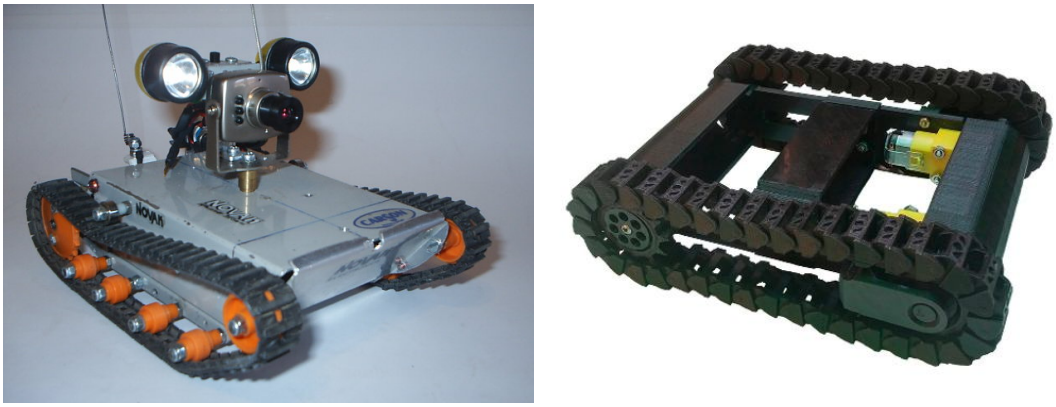
Figura 3: Robots móviles terrestres impulsados por ruedas

Robots con orugas

Los robots móviles basados en orugas representan una buena alternativa a los robots con ruedas o extremidades ya que presentan un mejor desempeño en terrenos hostiles o poco compactos. Debido a que el centro de gravedad del robot se mantiane bajo, el uso de orugas permite tener una buena estabilidad. Las principales desventajas de utilizar este tipo de mecanismos es que presentan problemas ocasionados por fricción de rodamiento, además de que el robot presenta mucha vibración en terrenos que no son lisos (González et al., 2015). En la figura 4 se muestran dos ejemplos de este tipo de robot.

Robots esféricos

Los robots esféricos cuentan con una estructura externa en forma de esfera que, además de contener los componentes del robot también los protege de agentes externos como polvo y humedad, así como contra impactos ocasionados por algún obstáculo. Los modelos básicos de robots esféricos pueden diferenciarse de acuerdo a su mecanismo de movimiento, entre estos mecanismos pueden encontrarse rueda de hamster, cambio de masas o péndulo. A continuación se presenta cada uno de ellos.



(a) (b)

Figura 4: Robots móviles terrestres impulsados por oruga

Rueda de hamster

El mecanismo de movimiento de este robot esférico consta de un carro dentro de la estructura que cubre al robot esférico, el movimiento es producido cuando al desplazarse el carro se desplaza en consecuencia el centro de gravedad del robot esférico.
Entre las ventajas de este tipo de mecanismo se encuentra la posibilidad de crear un robot esférico omnidireccional si las llantas del carro interno lo permiten, pero su funcionamiento se encuentra limitado al material de la esfera, es decir, la superficie de la esfera debe tener la suficiente adherencia para permitir que el robot pueda moverse, además de que al encontrarse con un obstáculo el carro puede volcarse y, si se trabaja en una zona de difícil acceso, no sería posible recuperar al robot (Schroll, 2008). Un ejemplo de este tipo de robot esférico es presentado en la figura 5.

Cambio de masas

Para realizar el desplazamiento con este mecanismo se colocan varias masas distribuidas en ejes del robot esférico y se mueven de acuerdo a la dirección en que se desee desplazar al robot esférico. Este tipo de mecanismo proporciona al robot esférico ciertas ventajas, como la posibilidad de realizar movimiento en cualquier dirección sin importar su orientación, pero resulta mucho más difícil de diseñar y controlar que otros mecanismos para robots esféricos(Ocampo, 2010). La figura 6 muestra este mecanismo.

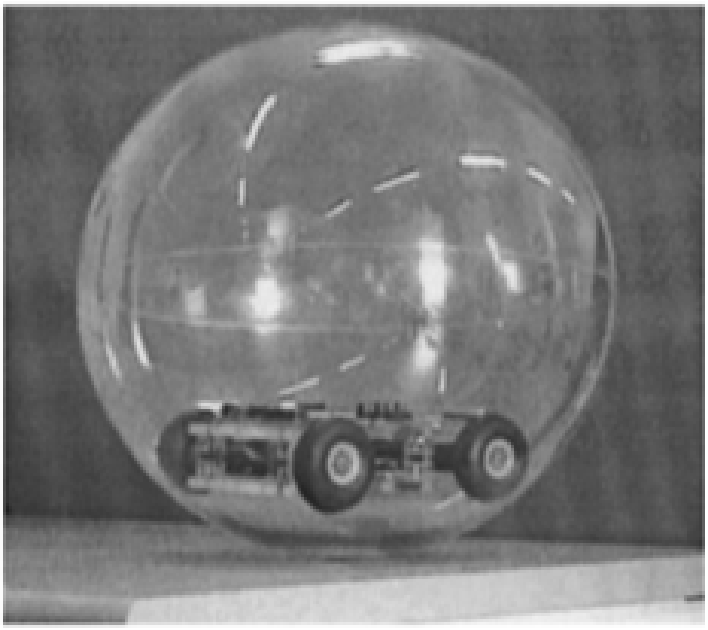


Figura 5: Robot esférico impulsado por rueda de hámster

Péndulo

Si se coloca un eje que atraviese la estructura de la esfera con un péndulo en el centro y se hace oscilar, se cambiará el centro de gravedad del robot esférico y, por lo tanto, se producirá un desplazamiento longitudinal. Este tipo de mecanismo proporciona, como una de sus principales ventajas, la libertad de elegir entre una gran variedad de materiales ya que el mecanismo de movimiento solamente se encuentra en contacto con la superficie del robot en dos puntos, pero a cambio se obtiene un sistema que sólo puede desplazarse de forma longitudinal y, si se adapta un activador al péndulo puede realizarse movimiento lateral pero solamente trazando semicírculos como ya se ha propuesto en (Nagai, 2008). En la figura 7 se presenta un robot esférico impulsado por péndulo.

1.2 Motivación

Los robots esféricos presentan muchas ventajas con respecto a otros robots móviles terrestres, tales como vehículos o robots equipados con extremidades, ya que sólo tienen

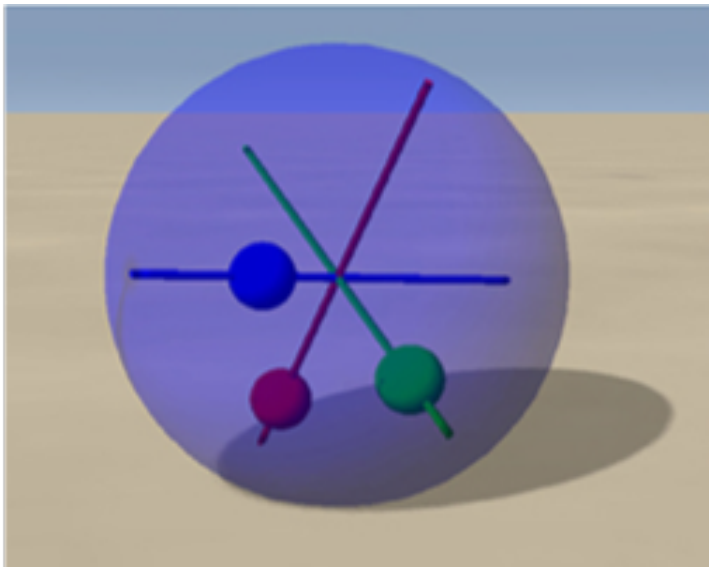


Figura 6: Robot esférico impulsado por cambio de masas

un punto de contacto con la superficie, lo cual resulta en un menor consumo de energía. También están provistos de una estructura externa que protege sus componentes internos contra colisiones, polvo y humedad. Adicionalmente, no pueden volcarse debido a su forma esférica (Nagai, 2008).
Este tipo de robot es capaz de realizar tareas que podrían ser peligrosas para la gente, tales como operar en ambientes hostiles (Liu et al., 2008) o incluso para llevar a cabo exploración planetaria (Bruhn et al., 2008).

1.3 Problema de investigación

En algunos trabajos se ha investigado el desplazamiento de un robot esférico en planos inclinados con pendiente constante, pero en ambientes realistas con los que interactúa este tipo de robots presentan pendientes que cambian constantemente. Por este motivo es necesario desarrollar un modelo de un robot esférico que lidie con este tipo de superficies además de considerar que las superficies sobre las que se desplaza pueden ser suaves y pueden sufrir leves deformaciones debido al peso del robot, tales como arena o grava y que, debido al desplazamiento del robot, pueden formar abultamientos los cuales no han sido considerados en los trabajos estudiados previamente.

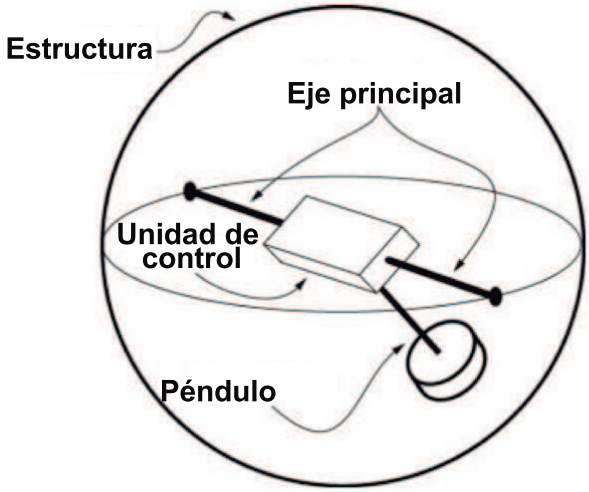


Figura 7: Robot esférico impulsado por péndulo

1.4 Preguntas de investigación

Este trabajo de investigación busca dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué modificaciones se realizan al modelo del sistema al considerar que el robot esférico se desplaza sobre un plano inclinado con pendiente variable?
- ¿Cómo modelar los abultamientos producidos debido al desplazamiento del robot esférico sobre una superficie suave?
- ¿Cómo aplicar la teoría de control para desarrollar algoritmos que permitan controlar la posición y desplazamiento del robot esférico considerando los puntos anteriores?
- ¿Es posible representar el sistema desarrollado en un entorno virtual de simulación para apreciar su comportamiento una vez implementados los algoritmos de control?

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Diseñar un robot esférico no holonómico impulsado por péndulo capaz de realizar movimiento controlado en superficies suaves inclinadas con pendiente variable.

1.5.2 Objetivos específicos

Para lograr el objetivo general de esta investigación se han definido los siguientes objetivos específicos:

1. Obtener el modelo matemático que describe el comportamiento del robot esférico no holonómico capaz de contender con superficies suaves e inclinadas con pendiente variable

2. Desarrollar algoritmos avanzados de control que permitan controlar la posición y la velocidad de desplazamiento del robot esférico no holonómico impulsado por péndulo

3. Evaluar el modelo matemático y los algoritmos de control utilizando un ambiente virtual.

1.6 Hipótesis

Es posible habilitar un robot esférico no holonómico impulsado por un péndulo central para ascender y descender en superficies suaves e inclinadas cuya pendiente varía con el tiempo

1.7 Contribuciones esperadas

El desarrollo del presente trabajo de investigación aportará al campo de la robótica móvil un nuevo modelo matemático que describirá el comportamiento de un robot esférico no holonómico impulsado por péndulo que dará solución a un problema que, de acuerdo con la revisión realizada, no ha sido considerado y que se presenta en una gran cantidad de ambientes en los cuales se pretende que se desplace, ya que en los trabajos analizados se considera que la superficie sobre la cual se desenvuelve este tipo de robots es totalmente rígida. A pesar de que en algunos casos la deformación de la superficie puede ser despreciada, en muchos otros es necesario considerar la fricción

por rodamiento que genera un torque en sentido contrario al desplazamiento. También se ha considerado en los trabajos realizados anteriormente que la inclinación de estas superficies es constante, pero en escenarios reales esto no sucede así debido a que el robot deberá desplazarse en superficies irregulares, lo que quiere decir que pueden existir cambios en la pendiente de inclinación de la superficie.
En cuanto al área de las ciencias computacionales se aportarán algoritmos que habilitarán a un robot esférico para desplazarse en ambientes hostiles y desconocidos. Estos algoritmos serán diseñados considerando el modelo matemático que describe su dinámica así como las limitaciones del sistema y las estrategias de control que se consideren apropiadas de acuerdo con los experimentos realizados, de tal forma que las pruebas realizadas puedan ser replicadas y muestren siempre los mismos resultados que se obtengan en este proyecto. La principal aportación de este trabajo de investigación será un nuevo modelo matemático que permita describir el comportamiento de un robot esférico impulsado por un péndulo central al desplazarse sobre una superficie inclinada ascendente y descendente cuya pendiente varía con respecto al tiempo y que, además sufre deformaciones ocasionadas el desplazamiento del robot sobre el material del que está conformada (arena, piedra molida, nieve, etc.) ya que en la revisión realizada de los trabajos relacionados no se contempla esta situación que es importante considerar si se pretende desarrollar un robot autónomo que se mueve en ambientes desconocidos y hostiles.

Las contribuciones principales de esta investigación son:

- Un modelo matemático que describa el comportamiento de un robot esférico no holonómico impulsado por un péndulo central sobre una superficie suave e inclinada cuya pendiente sea variable y la cual presenta abultamientos ocasionados por el desplazamiento del robot.
- Algoritmos avanzados de control que permitan al robot esférico no holonómico contender con superficies suaves y con pendiente variable y controlar su posición y velocidad.
- Un modelo simulado en un ambiente virtual del robot esférico no holonómico impulsado por péndulo.

1.8 Resumen de la metodología

Para realizar este trabajo de investigación se llevarán a cabo varias etapas las cuales se muestran en la figura 8 y que se describen a continuación.

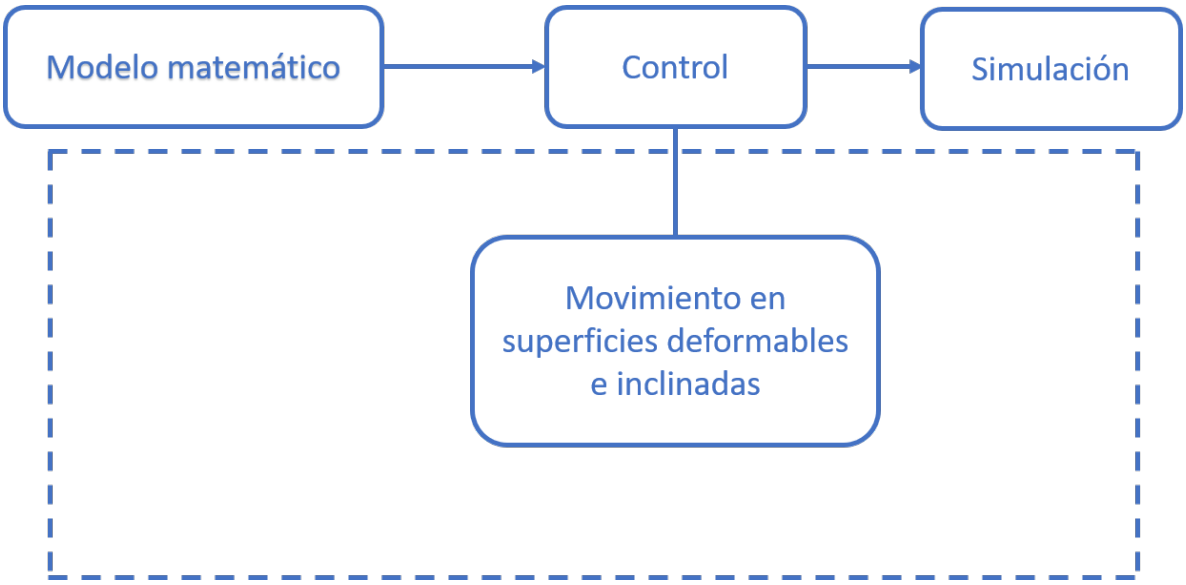


Figura 8: Metodología propuesta

1.8.1 Modelo matemático

Para obtener el modelo matemático del robot esférico no holonómico impulsado por péndulo se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange tomando en cuenta todos los parámetros del robot como masas, ángulos y radios, así como las fuerzas externas que actuarán sobre el robot. A pesar de que existen otras técnicas que permiten obtener el modelo matemático del sistema, como pueden ser diagramas de cuerpo libre o la formulación de Newton-Euler, para el desarrollo de este trabajo de investigación se eligió el método de Euler-Lagrange debido a que simplifica la obtención de las ecuaciones que describen al sistema en términos de la energía y el trabajo almacenados en el sistema en lugar de trabajar con las fuerzas y momentos de cada elemento del mismo. Además, se implementarán los modelos de los activadores que se utilicen con el fin de obtener un modelo preciso del robot esférico en las condiciones en que se desea innovar (planos inclinados con superficie suave).

1.8.2 Control

Una vez obtenido el modelo matemático que describe el comportamiento del robot esférico no holonómico impulsado por péndulo se implementarán técnicas avanzadas de control para garantizar su correcta locomoción en superficies suaves e inclinadas. Se pretende desarrollar algoritmos basados en diferentes técnicas como control realimentado de estados, control no lineal, control predictivo por modelo (MPC por sus siglas en inglés) con el fin de obtener un controlador que permita que el sistema opere de forma adecuada en ambientes hostiles.

1.8.3 Simulación

Cuando en el sistema se hayan implementado las técnicas de control necesarias para asegurar el correcto desempeño del robot esférico no holonómico impulsado por péndulo, se realizarán simulaciones en un entorno virtual que permitan visualizar el funcionamiento del mismo bajo condiciones reales (fricción, materiales del robot, material de la superficie).

2 Marco teórico

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos que se utilizan para el desarrollo de este proyecto de tesis.

2.1 Cabeceo, alabeo y guiñada

Además del movimiento que un robot puede realizar en los ejes coordenados x_0, y_0, z_0 también puede girar alrededor de estos ejes, estas rotaciones producen los ángulos conocidos como cabeceo (*roll*), alabeo (*pitch*) y guiñada (*yaw*), los cuales son representados con las letras griegas ϕ, θ y ψ respectivamente (Spong et al., 2006). las cuales se ilustran en la figura 9.

2.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden obtener a partir de la segunda ley de Newton en un sistema que consiste en una partícula de masa m la cual tiene movimiento limitado en una dirección, en este caso en la dirección del eje y. Esta partícula está

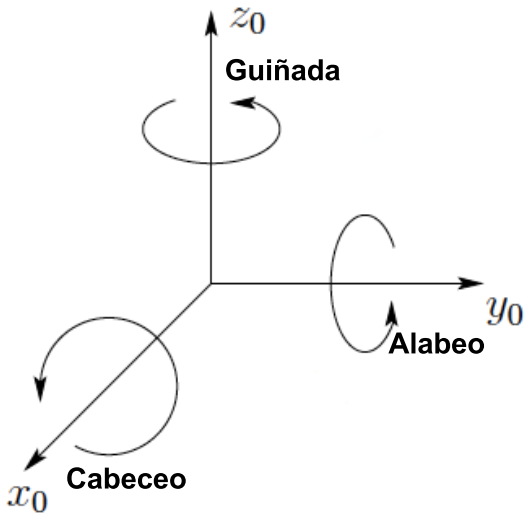


Figura 9: Ángulos que representan los movimientos de cabeceo (ϕ), alabeo (θ) y guiñada (ψ). Fuente: (Spong et al., 2006)

sujeta a una fuerza f y a la fuerza gravitacional mg como se muestra en la figura 10 (Spong et al., 2006).

Utilizando la segunda ley de Newton ($F = ma$) se obtiene la ecuación (1).

$$m\ddot{y} = f - mg \tag{1}$$

La parte izquierda de la ecuación (1) puede ser expresada como en la ecuación (2).

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}} \tag{2}$$

Donde:
$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m\dot{y} \rightarrow$ Energía cinética del sistema.

La fuerza gravitacional en la ecuación (1) se puede expresar como se muestra en la ecuación (3).

$$mg = \frac{\partial}{\partial y}(mgy) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \tag{3}$$

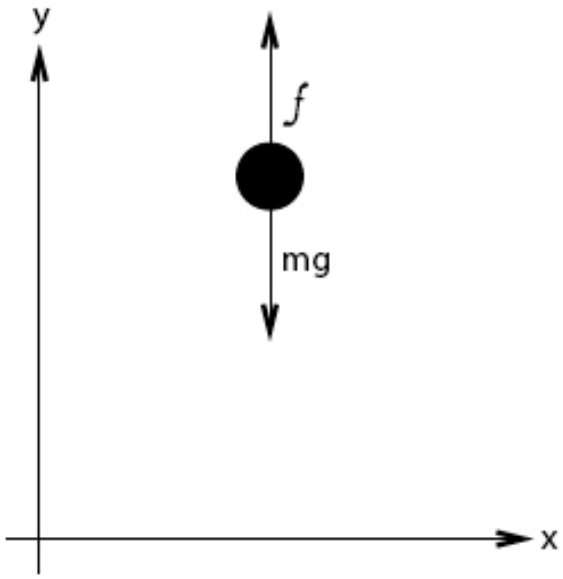


Figura 10: Sistema de un grado de libertad. Basado en (Spong et al., 2006)

Donde:
$\mathcal{U} = mgy \rightarrow$ Energía potencial debido a la gravedad.

De este modo, el Lagrangiano del sistema se puede definir como la diferencia entre las energías cinética y potencial como se expresa en la ecuación (4)

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \tag{4}$$

Si se deriva $\mathcal{L}$ parcialmente con respecto a $\dot{y}$ y y, respectivamente, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}$$

Al reemplazar estas relaciones en la ecuación (1) se obtiene la ecuación (5), que es conocida como la Ecuación de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f \tag{5}$$

2.3 Control

Una vez que se ha obtenido el modelo matemático del sistema se debe implementar un sistema para controlarlo. Las teorías de control que se usan comúnmente para resolver este tipo de problemas son el *control clásico* y el *control moderno*. El primero se utiliza principalmente en sistemas con una sola entrada y una sola salida (SISO) y utilizando la función de transferencia del sistema se obtiene el valor de salida de acuerdo a un valor de la entrada. Por otro lado, el *control moderno* se aplica en sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) usando una representación en espacio de estados (Ogata, 2010).

2.3.1 Función de transferencia

Una función de transferencia se puede definir como una ecuación diferencial que ha sido transformada del dominio del tiempo (t) al dominio de la frecuencia (s) utilizando la transformada de Laplace dando como resultado una relación de dos polinomios. Si se considera una ecuación diferencial ordinaria como la que se muestra en la ecuación (6), con $n > m$ y con condiciones iniciales $y^{(n-1)} = \cdots = y = 0$ en un tiempo $t = 0$, su función de transferencia se presenta en la ecuación (7) (Chau, 2002).

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \quad (6)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (7)$$

El denominador de la función $G(s)$ es conocido como el polinomio característico del sistema y sus raíces se conocen como los *polos* de $G(s)$ y revelan el comportamiento dinámico del sistema.

2.3.2 Representación en espacio de estados

Las ecuaciones diferenciales de orden superior o las ecuaciones múltiples pueden ser expresadas como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden.
Una representación en espacio de estados se utiliza para expresar un conjunto de ecuaciones diferenciales en forma de matriz, tal como se puede apreciar en las ecuaciones (8) y (9) (Chau, 2002).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{9}$$

Donde:
$\mathbf{x}\rightarrow$ Vector de variables de estado
$\mathbf{u}\rightarrow$ Entrada del sistema
$\mathbf{y}\rightarrow$ Salida del sistema
$\mathbf{A}\rightarrow$ Matriz de proceso (modelo de la planta)
$\mathbf{B}\rightarrow$ Matriz de entradas
$\mathbf{C}\rightarrow$ Matriz de salidas
$\mathbf{D}\rightarrow$ Matriz de alimentación (usualmente cero)

2.3.3 Control PID

Un controlador PID combina la acción de un control proporcional, la acción de un control integral y la acción de un control derivativo y su representación está dada por la ecuación (10) y su función de transferencia se expresa como la ecuación (11) (Ogata, 2010).

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \tag{10}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{11}$$

Donde:
$K_p\rightarrow$ Ganancia proporcional
$T_i\rightarrow$ Tiempo integral
$T_d\rightarrow$ Tiempo derivativo

2.3.4 Control realimentado de estados

Los métodos de diseño utilizando espacio de estados resuelve el problema de especificar todos los polos en lazo cerrado de los sistemas de orden superior. Dado que para colocar n cantidades desconocidas se necesitan n parámetros ajustables, los métodos de espacio de estados introducen en el sistema otros parámetros ajustables de tal forma que se pueden colocar todos los polos del sistema en lazo cerrado.

Para aplicar el método de asignación de polos en plantas de fase variable se siguen los siguientes pasos (Nise, 2007):

1. Representar la planta en la forma de fase variable.
2. Realimentar cada fase variable a la entrada de la planta por medio de una ganancia k_i.
3. Encontrar la ecuación característica para el sistema en lazo cerrado representado en el paso 2.
4. Determinar la ubicación de los polos en lazo cerrado y determinar una ecuación característica equivalente.
5. Igualar los coeficientes similares de las ecuaciones características de los pasos 3 y 4 y resolver para k_i.

La figura 11 muestra la representación en diagrama de bloques de una planta con realimentación de estados de la cual se pueden deducir las ecuaciones (12) y (13) que corresponden a las ecuaciones de estado del sistema en lazo cerrado.

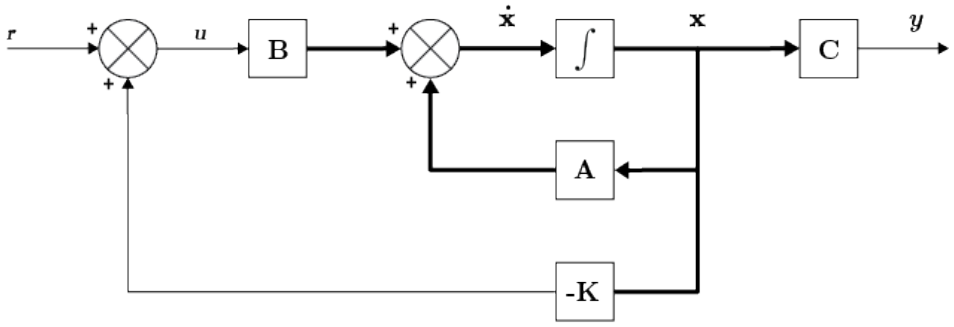


Figura 11: Planta con realimentación de estados. Basado en (Nise, 2007)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + r) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r \tag{12}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{13}$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Si se forma el sistema de lazo cerrado realimentando cada variable de estado a u, se obtiene la ecuación (14).

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{14}$$

con:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

El sistema en lazo cerrado queda expresado por la ecuación (15).

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \cdots & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix} \tag{15}$$

La ecuación (16) representa la ecuación característica del sistema en lazo cerrado.

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = s^n &+ (a_{n-1} + k_n)s^(n-1) + (a_{n-2} + k_{n-1})s^(n-2) \\ &+ \cdots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

La ecuación característica deseada tras realizar la asignación de polos será entonces la que se muestra en la ecuación (17).

$$s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \cdots + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0 \tag{17}$$

Si se igualan las ecuaciones (16) y (17) se obtienen los coeficientes deseados, los cuales se presentan en la ecuación (18),

$$d_i = a_i + k_{i+1} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{18}$$

es decir:

$$k_{i+1} = d_i - a_i$$

3 Trabajo relacionado

En esta sección se presentan algunos robots esféricos realizados previamente, los cuales utilizan locomoción basada en un péndulo central y que están relacionados con los objetivos propuestos en el presente proyecto de investigación.

3.1 Movimiento en plano inclinado

Se han propuesto diferentes modelos capaces de subir planos inclinados utilizando el modelo básico de un robot esférico impulsado por péndulo, pero la principal limitante que presentan es la inclinación máxima de la pendiente que pueden subir, ya que en estos trabajos solamente se utilizan pendientes de hasta 30^o de inclinación.

3.1.1 BYQ-III

BYQ-III (Yu et al., 2011) es un robot esférico que utiliza un modelo modificado de locomoción con péndulo el cual está pensado para recorrer terrenos irregulares pero dentro de las pruebas realizadas se encuentra el movimiento en un plano inclinado de 15^o. El modelo del robot BYQ-III se muestra en la figura 12.

3.1.2 BYQ-VIII

En este trabajo se prueba un robot esférico impulsado por dos péndulos que se mueven ortogonalmente al eje como se muestra en la figura 13 en un plano inclinado realizando seguimiento de trayectorias, es decir, el robot esférico se desplaza realizando trayectorias en el plano inclinado (Yu et al., 2013). La simulación se lleva a cabo en un plano inclinado con una pendiente de 10^o.

3.1.3 Robot esférico en plano inclinado

Roozegar et al. en 2017a proponen un análisis y control en modo deslizante para el movimiento de un robot esférico en un plano inclinado con pendiente variable, se establece un ángulo inicial de $\frac{\pi}{8} rad$ y se varía con respecto al tiempo en $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12}\sin(\frac{\pi t}{40})$.

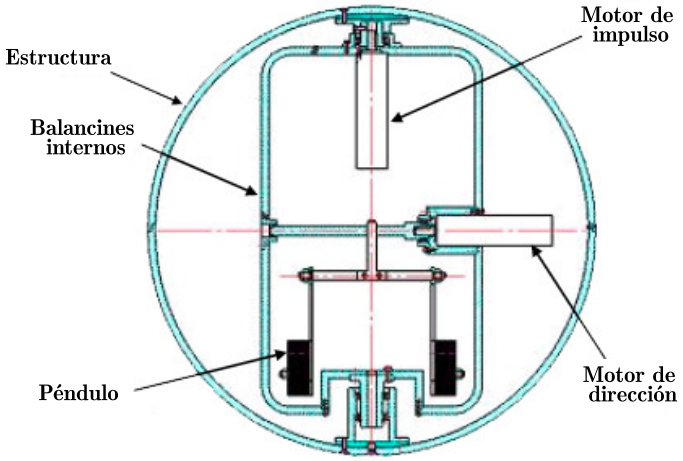


Figura 12: BYQ-III: Fuente (Yu et al., 2011)

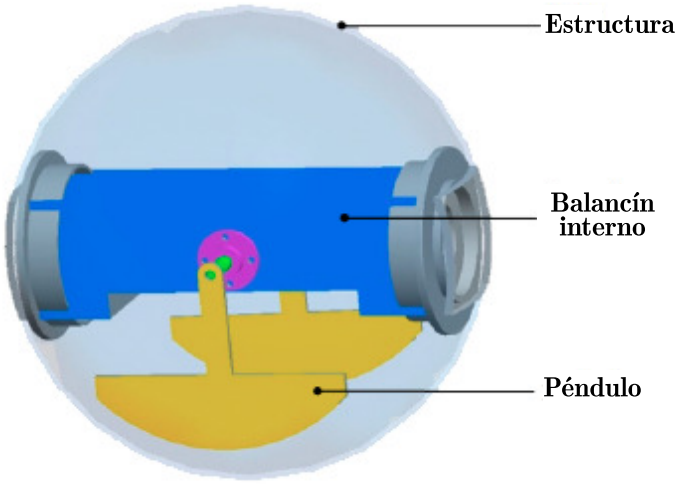


Figura 13: BYQ-VIII: Fuente (Yu et al., 2013)

En Roozegar & Mahjoob se propone utilizar controladores PID y difuso para desplazar al robot esférico en pendientes positivas y negativas de hasta 30^o en simulación, mientras que experimentalmente se realizaron pruebas de hasta 22^o. El modelo del robot utilizado en estos trabajos es el que se puede observar en la figura 14.

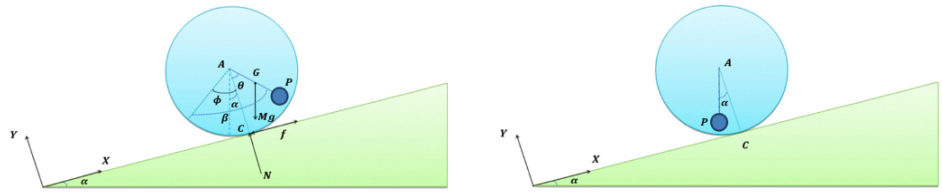


Figura 14: Robot esférico en plano inclinado: Fuente (Roozegar et al., 2017a; Roozegar & Mahjoob, 2016)

3.2 Robot esférico en plano inclinado variable

En 2017b, Roozegar et al. proponen un control en modo deslizante para controlar un robot esférico impulsado por péndulo en el cual se consideran los cambios de la pendiente como perturbaciones al sistema y que van incrementando en un valor aproximado de 1.17^o.

3.3 Robot esférico en superficies suaves

De acuerdo a la información que se ha logrado recopilar no se han encontrado trabajos que contemplen superficies suaves en el desplazamiento de un robot esférico impulsado por péndulo.

4 Modelo propuesto

Para realizar el presente trabajo de investigación se propone utilizar dos modelos, uno que describa el movimiento longitudinal del robot esférico mientras que en otro se presenta el movimiento del robot esférico en un plano inclinado.

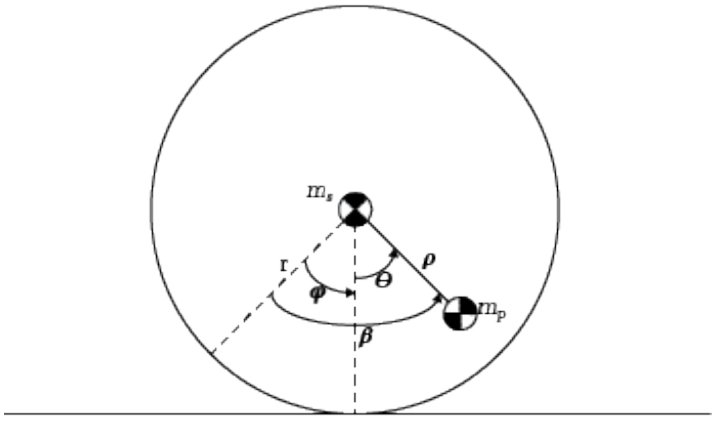


Figura 15: Modelo del robot esférico (Movimiento longitudinal)

4.1 Movimiento longitudinal

La figura 15 muestra el modelo del robot esférico en movimiento longitudinal.

Las ecuaciones que describen las energías cinética, potencial y rotacional tanto de la esfera como del péndulo son las que se presentan en las ecuaciones (19) - (24).

$$\mathcal{U}_1 = 0 \tag{19}$$

$$\mathcal{U}_2 = -m_p g e \cos(\phi + \theta) \tag{20}$$

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_s (r\dot{\phi})^2 \tag{21}$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} M_p \{(r\phi - \rho\cos(\phi+\theta)(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 + (\rho\sin(\phi+\theta)(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2)\} \tag{22}$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}^2 \tag{23}$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2} J_2 (\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 \tag{24}$$

Donde:

$\mathcal{U}_1 \rightarrow$ Energía potencial de la esfera con respecto a la altura de su centroide.

$\mathcal{U}_2 \rightarrow$ Energía potencial del péndulo con respecto a la altura del centroide de la esfera
$\mathcal{K}_1 \rightarrow$ Energía cinética de la esfera
$\mathcal{K}_2 \rightarrow$ Energía cinética del péndulo
$\mathcal{T}_1 \rightarrow$ Energía rotacional de la esfera
$\mathcal{T}_2 \rightarrow$ Energía rotacional del péndulo
$r \rightarrow$ Radio de la esfera
$\rho \rightarrow$ Distancia entre los centroides de la esfera y el péndulo
$\phi \rightarrow$ Ángulo de rotación de la esfera
$\theta \rightarrow$ Ángulo de rotación del péndulo
$\dot{\phi} \rightarrow$ Velocidad angular de la esfera
$\dot{\theta} \rightarrow$ Velocidad angular del péndulo
$J_1 \rightarrow$ Momento de inercia de la esfera alrededor de su centroide
$J_2 \rightarrow$ Momento de inercia del péndulo alrededor de su centroide
$m_s \rightarrow$ Masa de la esfera
$m_p \rightarrow$ Masa del péndulo
$g \rightarrow$ Aceleración de la gravedad

Con las ecuaciones (19) - (24) se puede obtener el Lagrangiano del sistema, el cual se presenta en la ecuación (25).

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 - \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2 \tag{25}$$

La ecuación de Lagrange se expresa en las ecuaciones (26 and 27).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\mathcal{T} + \mathcal{T}_f \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \mathcal{T} \tag{27}$$

Donde:
$\mathcal{T} \rightarrow$ Torque aplicado entre la esfera y el péndulo
$\mathcal{T}_f \rightarrow$ Torque obtenido de la fricción entre la esfera y la superficie

4.1.1 Control del movimiento longitudinal

En (Nagai, 2008) se proponen algunos métodos de control, entre los que se encuentran:

- Control por suministro de voltaje al motor
- Control de la velocidad de rotación del motor

Control por suministro de voltaje al motor

La ecuación (28) describe el voltaje del motor y la ecuación (29) describe su torque.

$$V = IR + K_e\dot{\phi} \tag{28}$$

$$\mathcal{T} = K_t I \tag{29}$$

Donde:
$I \rightarrow$ Corriente de la armadura
$R \rightarrow$ Resistencia del motor
$V \rightarrow$ Voltaje suministrado
$K_e \rightarrow$ Constante de velocidad
$T \rightarrow$ Torque generado
$K_t \rightarrow$ Constante de torque

Al eliminar la corriente I se obtiene la ecuación (30).

$$\mathcal{T} = \frac{K_t}{R}\left(V - K_e\dot{\theta}\right) \tag{30}$$

La fricción del modelo ($\mathcal{T}_f$) se puede descomponer en dos tipos diferentes de fricción, por una parte la fricción de Coulomb $\mathcal{T}_c$ y la fricción viscosa $\mathcal{T}_v$. Esto se expresa en la ecuación (31).

$$\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_c + \mathcal{T}_v\,\dot{\phi} \tag{31}$$

La función de transferencia del sistema se obtiene al linealizar las ecuaciones del sistema suponiendo que el ángulo del péndulo es lo suficientemente pequeño ($\phi + \theta \ll 1$, $\dot{\phi} + \dot{\theta} \ll 1$, $\ddot{\phi} + \ddot{\theta} \ll 1$) con lo cual se obtienen las ecuaciones (32) y (33).

$$\begin{aligned} -\mathcal{T} + \mathcal{T}_f = \; & \ddot{\phi}\,(J_1 + J_2 + m_s r^2 + m_p r^2 + M_2\rho^2 - 2m_p r\rho) + \\ & \ddot{\theta}\,(J_2 - m_p r\rho + m_p\rho^2) + m_p g e(\phi + \theta) \end{aligned} \tag{32}$$

$$\mathcal{T} = \ddot{\phi}(J_2 - m_p r\rho + m_p\rho^2) + \ddot{\theta}(J_2 + m_p\rho^2) + m_p g\rho(\phi + \theta) \tag{33}$$

Al aplicar la transformada de Laplace resultan las ecuaciones (34), (35) y (36).

$$\begin{aligned} -\mathcal{T} = \quad & [-s\,\mathcal{T}_v + \rho g m_p + s^2\{J_1 + J_2 + r^2 m_s + (\rho - r)^2 m_p\}]\Phi \\ & + [s^2 J_2 + \rho\{g + (\rho - r)s^2\}m_p]\Theta \end{aligned} \tag{34}$$

$$\mathcal{T} = s^2 J_2(\Phi + \Theta) + \rho m_p[\{g + (\rho - r)s^2\}\Phi + (g + \rho s^2)\Theta] \tag{35}$$

$$\mathcal{T} = \frac{K_t}{R}(V - K_e s\Theta) \tag{36}$$

La función de transferencia es la que aparece en la ecuación (37).

$$\frac{\Phi}{V} = \frac{A + Bs^2}{C + Ds + Es^2 + Fs^3} \tag{37}$$

Donde:

$A = -2\rho g K_t m_p$

$B = K_t(-2J_2 + \rho(-2\rho + r)m_p)$

$C = -\rho g R\,\mathcal{T}_v\, m_p + 2\rho g K_e K_t m_p$

$D = -\,\mathcal{T}_v\, K_e K_t + \rho g R J_1 m_p + \rho g r^2 R m_s m_p + \rho g r^2 R m_p^2$

$E = -R\,\mathcal{T}_v\, J_2 + 2J_2 K_e K_t - \rho^2 R\,\mathcal{T}_v\, m_p + K_e K_t(J_1 + r^2 m_s + (2\rho^2 - 3\rho r + r^2)m_p)$

$F = \rho^2 R J_1 m_p + \rho^2 r^2 R m_s m_p + R J_2(J_1 + r^2(m_s + m_p))$

La figura 16 muestra la respuesta del sistema a un escalón unitario en donde se puede apreciar que se trata de un sistema autorregulado, ya que a pesar de que en la respuesta se observan oscilaciones se alcanza un estado estacionario en un valor cercano a los $-4\frac{rad}{s}$ sin necesidad de implementar algún controlador.

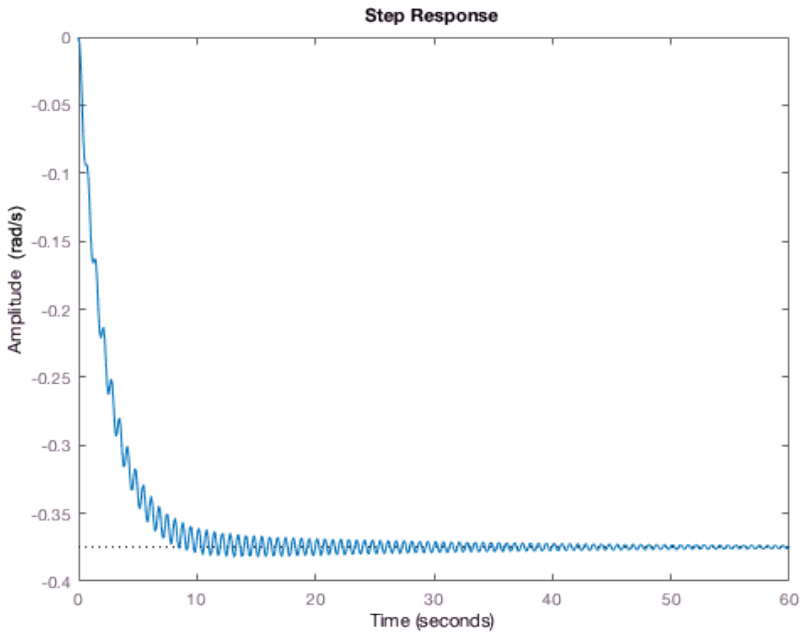


Figura 16: Respuesta del sistema a un escalón unitario (Suministro de voltaje)

4.2 Movimiento en plano inclinado con superficie suave

La figura 17 muestra el modelo del robot esférico en un plano inclinado en el cual se considera que la superficie es suave que es ligeramente deformable debido al peso del robot.

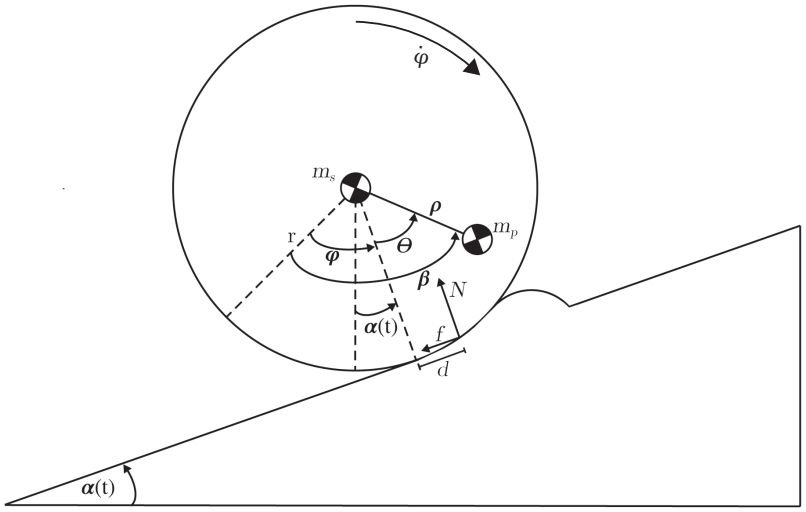


Figura 17: Modelo del robot esférico (Plano inclinado variable con superficie suave)

Para realizar el movimiento en un plano inclinado se debe considerar que la dirección de la gravedad cambia con respecto al movimiento longitudinal, es decir que sólo cambian las ecuaciones que describen la energía potencial U_1 y U_2 tal como se muestra en las ecuaciones (38) y (39).

$$U_1 = -m_s g r \phi \sin\alpha \tag{38}$$

$$U_2 = -m_p g r \phi \sin\alpha - m_p g \rho \cos(\phi + \theta + \alpha) \tag{39}$$

La energía rotacional de la esfera cambia debido a la deformación que sufre la superficie suave debido al peso del robot esférico durante el desplazamiento generando

una torca que se opone al movimiento, esta torca es producida por el fenómeno conocido como *fricción de rodamiento* y puede ser calculada como se muestra en la ecuación (40).

$$\mathcal{T}_{rod} = -N \cdot d \cdot \phi \tag{40}$$

Donde:
$N \rightarrow$ Fuerza normal del robot esférico impulsado por péndulo.
$d \rightarrow$ Distancia entre el centro de masa del robot esférico y el punto de contacto con el abultamiento producido por la deformación de la superficie suave debido al peso del robot.

La fuerza normal del robot esférico en un plano inclinado está representada por la ecuación (41), por lo tanto la energía rotacional de la esfera queda representada como en (42).

$$N = m_s g \cos(\alpha) \tag{41}$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}^2 - m_s g \cos(\alpha) d\phi \tag{42}$$

Las ecuaciones que representan la dinámica del robot están representadas por las ecuaciones (43) y (44).

$$\begin{aligned} -T + T_f = {} & \ddot{\phi}(J_1 + J_2 + m_s r^2 + m_p r^2 + m_p \rho^2 - 2 m_p r \rho \cos(\phi + \theta)) \\ & + \ddot{\theta}(J_2 - m_p r \rho \cos(\phi + \theta) + m_p \rho^2) \\ & + m_p r \rho \sin(\phi + \theta)(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + m_p g \rho \sin(\phi + \theta + \alpha) \\ & - (m_s + m_p) g r \sin\alpha + m_s g d \cos(\alpha) \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} T = {} & \ddot{\phi}(J_2 - m_p r \rho \cos(\phi + \theta) + m_p \rho^2) + \ddot{\theta}(J_2 + m_p \rho^2) \\ & + m_p g \rho \sin(\phi + \theta + \alpha) \end{aligned} \tag{44}$$

Para linealizar el sistema es necesario separar el ángulo de inclinación del plano (α) de los ángulos que producen el movimiento del robot esférico ($\phi + \theta$) utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Donde:

$x = \phi + \theta$
$y = \alpha$

Obteniendo las ecuaciones (45) y (46).

$$\begin{aligned} -T + T_f = {} & \ddot{\phi}(J_1 + J_2 + m_s r^2 + m_p r^2 + m_p \rho^2 - 2m_p r\rho\cos(\phi+\theta)) \\ & + \ddot{\theta}(J_2 - m_p r\rho\cos(\phi+\theta) + m_p\rho^2) \\ & + m_p r\rho\sin(\phi+\theta)(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 \\ & + m_p g\rho(\sin(\phi+\theta)\cos\alpha + \cos(\phi+\theta)\sin\alpha) - (m_s+m_p)gr\sin\alpha \\ & + m_s gd\cos(\alpha) \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} T = {} & \ddot{\phi}(J_2 - m_p r\rho\cos(\phi+\theta) + m_p\rho^2) + \ddot{\theta}(J_2 + m_p\rho^2) \\ & + m_p g\rho(\sin(\phi+\theta)\cos\alpha + \cos(\phi+\theta)\sin\alpha) \end{aligned} \tag{46}$$

Al igual que en el modelo del movimiento longitudinal, es necesario linealizar el modelo para obtener la transformada de Laplace, así como la función de transferencia. Para llevar a cabo la linealización se debe considerar que $\phi+\theta \ll 1$, $\dot{\phi}+\dot{\theta} \ll 1$, $\ddot{\phi}+\ddot{\theta} \ll 1$ y a partir de esto se derivan las ecuaciones (47) y (48).

$$\begin{aligned} -T + T_f = {} & \ddot{\phi}(J_1 + J_2 + m_s r^2 + m_p r^2 + m_p\rho^2 - 2m_p r\rho) + \ddot{\theta}(J_2 - m_p r\rho + m_p\rho^2) \\ & + m_p g\rho[(\phi+\theta)\cos\alpha + \sin\alpha] - (m_s+m_p)gr\sin\alpha + m_s gd\cos(\alpha) \end{aligned} \tag{47}$$

$$T = \ddot{\phi}(J_2 - m_p r\rho + m_p\rho^2) + \ddot{\theta}(J_2 + m_p\rho^2) + m_p g\rho[(\phi+\theta)\cos\alpha + \sin\alpha)] \tag{48}$$

Si se considera que $T_f = T_c + T_v\omega_1$ y que T_c es lo suficientemente pequeño que puede ser despreciado, entonces las ecuaciones (49) y (50) son obtenidas, mientras que la función de transferencia está expresada en la ecuación (51).

$$
\begin{aligned}
-T = &[-sT_v + s^2(J_1 + J_2 + m_s r^2 + m_p r^2 + m_p \rho^2 - 2m_p r\rho) + m_p g\rho\cos\alpha]\Phi \\
&+ s^2[J_2 - m_p r\rho + m_p\rho^2 + m_p g\rho\cos\alpha]\Theta \\
&+ \frac{m_p g\rho\sin\alpha - (m_s + m_p)gr\sin\alpha + m_s gd\cos(\alpha)}{s}
\end{aligned} \tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
T = &[s^2(J_2 - m_p r\rho + m_p\rho^2) + m_p g\rho\cos\alpha]\Phi + [s^2(J_2 + m_p\rho^2) + m_p g\rho\cos\alpha]\Theta \\
&+ \frac{m_p g\rho\sin\alpha}{s}
\end{aligned} \tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi}{\Theta} = &\frac{(-2J_2 + m_p r\rho - 2m_p\rho^2)s^3 - 2m_p g\rho\cos\alpha s[-2m_p g\rho\sin\alpha]\Theta^{-1}}{[(J_1 + 2J_2 + m_s r^2 + m_p r^2 + 2m_p\rho^2 - 3m_p r\rho)s^3 - T_v s^2 + 2m_p g\rho\cos\alpha s]} \\
&+ \frac{[-(m_s + m_p)gr\sin\alpha + m_s gd\cos(\alpha)]\Theta^{-1}}{[(J_1 + 2J_2 + m_s r^2 + m_p r^2 + 2m_p\rho^2 - 3m_p r\rho)s^3 - T_v s^2 + 2m_p g\rho\cos\alpha s]}
\end{aligned} \tag{51}
$$

4.3 Ángulos máximos del plano inclinado

Existen dos condiciones que se deben cumplir para que el robot esférico impulsado por péndulo se pueda desplazar en un plano inclinado (Abad-Manterola et al., 2009). La primera de ellas es que el torque que produce el robot esférico debe ser mayor al torque que se opone al movimiento y que es proporcional a la inclinación del plano inclinado (expresión (52)) mientras que la segunda condición establece que la fricción cinética entre el robot y la superficie debe ser mayor al valor de la tangente del ángulo de inclinación del plano como se indica en la expresión (53). Si esto no se cumple el robot esférico no podrá ascender por el plano inclinado sin importar el torque que pueda generar.

$$
\tau > (m_s + m_p)gr\sin\alpha \tag{52}
$$

$$
\mu > \tan\alpha \tag{53}
$$

Este trabajo de investigación está enfocado en superficies suaves, por lo tanto en la Tabla 1 se presentan algunos coeficientes de fricción cinética en este tipo de superficies considerando que el robot esférico está rodeado de goma o caucho con el fin

de incrementar su adherencia a la superficie sobre la que se desplaza (CausaDirecta, 2013). También se presentan otros coeficientes de fricción con el fin de ilustrar el ángulo máximo que el robot esférico alcanzaría en caso de moverse sobre una superficie rígida como lo es el concreto.

Tabla 1: Coeficientes de fricción cinética en distintos materiales

Superficie	μ	α_{max}	$\tan(\alpha)$
Concreto usado	0.60	30^o	0.5774
Grava suelta	0.40	21^o	0.3839
Escorias compactadas	0.50	26^o	0.4877
Piedra machacada	0.55	28^o	0.5317
Hielo liso	0.10	5^o	0.08749
Nieve compactada	0.30	16^o	0.0.2867
Nieve suelta	0.10	5^o	0.08749

En la figura 18 se muestran los diferentes valores del ángulo de inclinación del plano y la tangente del mismo. También se ilustran los diferentes materiales sobre los que se desplaza el robot esférico para comparar los ángulos máximos que pueden ser utilizados en el plano inclinado.

4.4 Altura máxima de las deformaciones de la superficie

Cuando el robot esférico impulsado por péndulo se encuentra con una deformación en la superficie sobre la que se desplaza se produce un torque que se opone al movimiento del robot esférico, por lo tanto, para definir la altura máxima que pueden tener estas deformaciones es necesario considerar que el torque producido por el robot esférico debe ser mayor al torque que se opone al desplazamiento (Nagai, 2008). Esta relación entre ambos torques está representada en las ecuaciones (54) a (59).

$$(Torque\ del\ robot) > (Torque\ producido\ por\ el\ abultamiento) \tag{54}$$

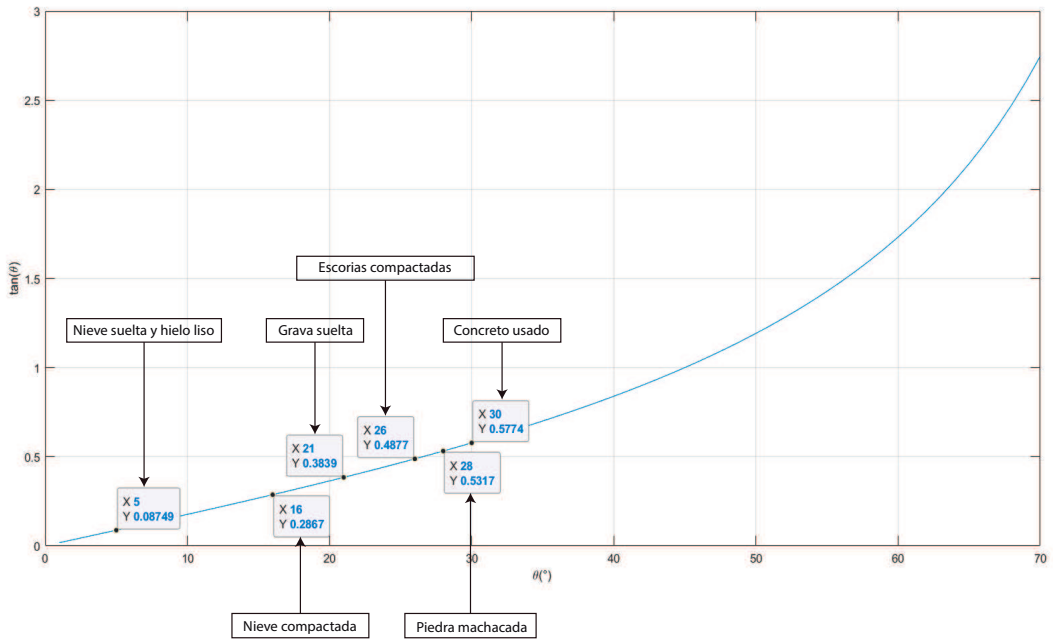


Figura 18: Relación entre ángulo y tangente del plano inclinado

$$m_p g\rho \sin\phi > (m_s + m_p)g\sqrt{r^2 - (r-h)^2} \tag{55}$$

$$m_p^2 \rho^2 \sin^2\phi > (m_s + m_p)^2\{r^2 - (r-h)^2\} \tag{56}$$

$$(r-h)^2 > r^2 - \frac{\rho^2 \sin^2\phi m_p^2}{(m_s + m_p)^2} \tag{57}$$

$$h < r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{\rho \sin\phi m_p}{m_s + m_p}\right)^2} \tag{58}$$

$$h_{max} = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{\rho m_p}{m_s + m_p}\right)^2} \tag{59}$$

5 Resultados preliminares

En esta sección se presentan los resultados experimentales del presente proyecto de investigación. En primer lugar se presenta un análisis de estabilidad que se llevó a cabo con dos robots esféricos impulsados por péndulo realizados en trabajos anteriores. También se implementaron controladores realimentados de estados a estos modelos con la finalidad de observar su comportamiento al desplazarse en un plano inclinado, el primero de ellos es el modelo propuesto por Nagai (2008) mientras que el segundo fue propuesto por Roozegar & Mahjoob (2016). El objetivo de analizar y programar estos modelos es familiarizarse y conocer de forma directa el tipo de control y consideraciones a tener en cuenta para hacer funcionar un robot esférico operando en un plano inclinado.

5.1 Análisis de estabilidad de un robot esférico impulsado por péndulo

Con el objetivo de conocer las limitaciones que presenta un robot esférico impulsado por péndulo se sometieron dos modelos a un análisis de estabilidad, el primero desarrollado por Nagai (2008) y el segundo por Roozegar & Mahjoob (2016). El procedimiento realizado consistió en variar el ángulo de inclinación del péndulo interno que produce el movimiento de desplazamiento del robot esférico y analizar el comportamiento del polinomio característico que describe la dinámica del sistema linealizado y obteniendo

la parte real de la raíz ya que, si esta es negativa entonces el sistema es considerado estable, pero si este valor es positivo entonces el sistema será inestable. En la figura (19) se muestra la parte real de la raíz del polinomio característico del robot esférico desarrollado por Nagai (2008) en donde se puede apreciar que cuando el ángulo tiene un valor $-90^o < \theta_1 < 90^o$ la parte real de la raíz es negativa y por lo tanto es sistema es estable, a diferencia de los demás valores, para los cuales la raíz es mayor a cero y el sistema se vuelve inestable. En el caso de la figura 20 que corresponde al robot esférico desarrollado por Roozegar & Mahjoob (2016) el sistema se comporta de forma muy similar al anterior, es decir que mientras en ángulo θ se encuentre en un rango de 0^o a 90^o o de -90^o a 0^o el sistema será estable, mientras que en los demás valores el sistema será inestable debido a que la parte real es mayor a cero. Esto demuestra que sin importar los parámetros del robot, tales como masa, torque, radio o la longitud del péndulo, el robot esférico será estable solamente si el ángulo del péndulo se encuentra dentro de este rango.

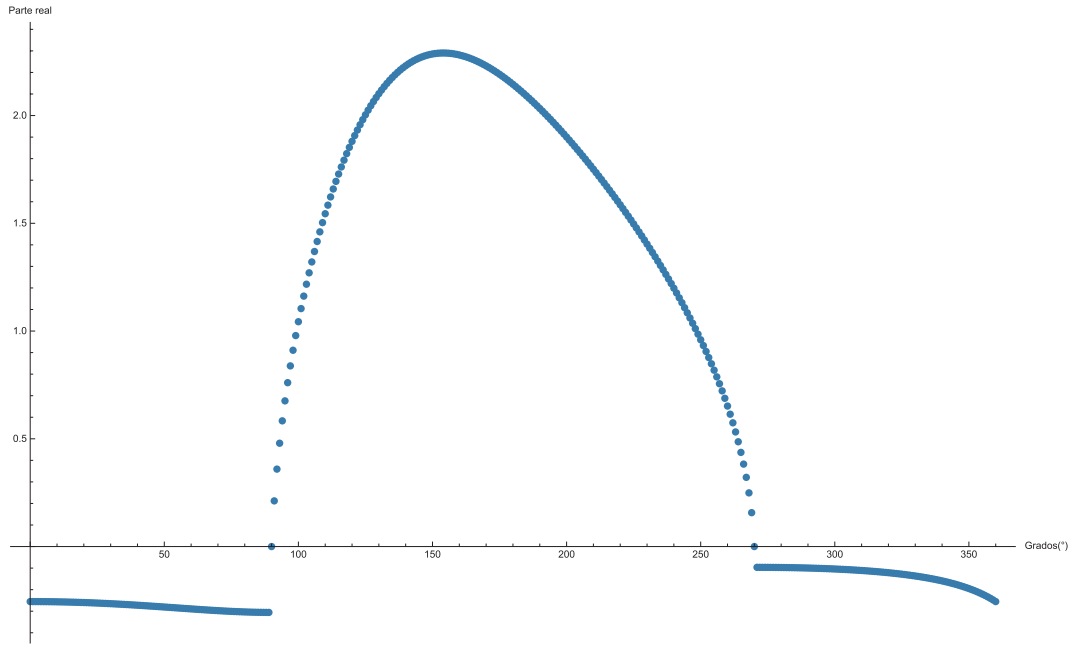


Figura 19: Análisis de estabilidad del robot esférico desarrollado por Nagai (2008)

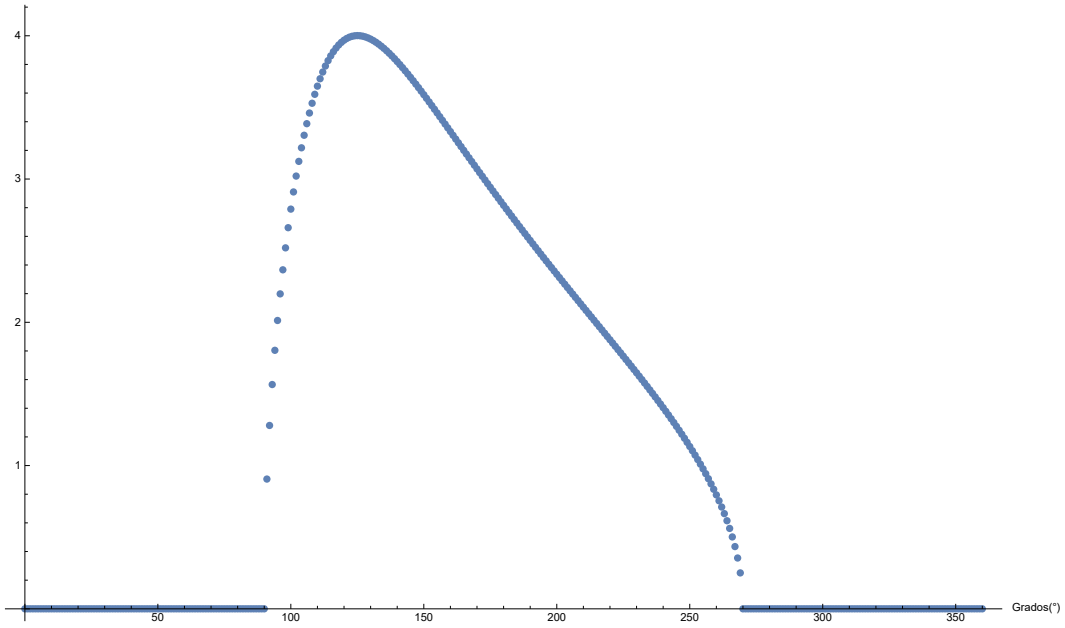


Figura 20: Análisis de estabilidad del robot esférico desarrollado por Roozegar & Mahjoob (2016)

Modelo Nagai (2008)

Este modelo de robot esférico está basado en el trabajo de Nagai (2008) y es el que se ilustra en la figura 21, cabe mencionar que en este trabajo únicamente se presenta el diagrama que representa al robot esférico en un plano inclinado, así como las ecuaciones (60) y (61) que representan la dinámica del sistema.

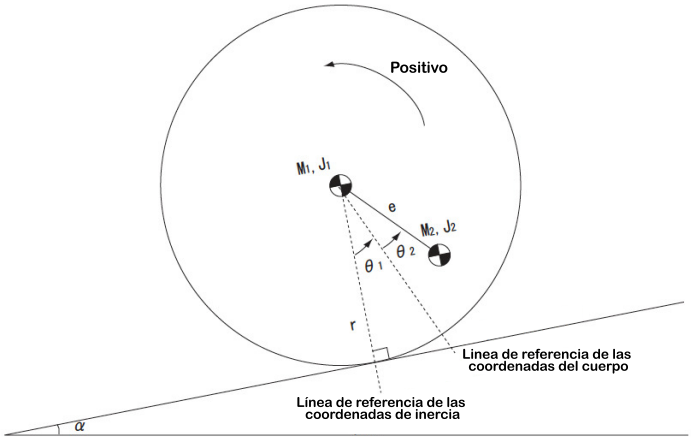


Figura 21: Modelo del robot esférico en un plano inclinado (Nagai, 2008)

$$
\begin{aligned}
-T + T_f = {} & a_1(J_1 + J_2 + M_1 r^2 + M_2 r^2 + M_2 e^2 - 2M_2 re\cos(\theta_1 + \theta_2)) \\
& + a_2(J_2 - M_2 re\cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2 e^2) \\
& + M_2 re\sin(\theta_1 + \theta_2)(\omega_1 + \omega_2)^2 \\
& + M_2 ge\sin(\theta_1 + \theta_2 + \alpha) - (M_1 + M_2) gr\sin\alpha
\end{aligned} \tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
T = {} & a_1(J_2 - M_2 re\cos(\theta_1 + \theta_2) + M_2 e^2) + a_2(J_2 + M_2 e^2) \\
& + M_2 ge\sin(\theta_1 + \theta_2 + \alpha)
\end{aligned} \tag{61}
$$

Donde:

$r \rightarrow$ Radio de la esfera
$e \rightarrow$ Distancia entre los centroides de la esfera y el péndulo

$\theta_1 \rightarrow$ Ángulo de rotación de la esfera
$\theta_2 \rightarrow$ Ángulo de rotación del péndulo
$\omega_1 \rightarrow$ Velocidad angular de la esfera
$\omega_2 \rightarrow$ Velocidad angular del péndulo
$a_1 \rightarrow$ Aceleración angular de la esfera
$a_2 \rightarrow$ Aceleración angular del péndulo
$J_1 \rightarrow$ Momento de inercia de la esfera alrededor de su centroide
$J_2 \rightarrow$ Momento de inercia del péndulo alrededor de su centroide
$M_1 \rightarrow$ Masa de la esfera
$M_2 \rightarrow$ Masa del péndulo
$g \rightarrow$ Aceleración de la gravedad
$T \rightarrow$ Torque aplicado entre la esfera y el péndulo
$T_f \rightarrow$ Torque obtenido de la fricción entre la esfera y la superficie

Las expresiones (62) y (63) muestran la representación del sistema en variables de estado.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{62}$$

$$y = Cx + Du \tag{63}$$

se obtienen los parámetros presentados en la expresión (64):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7.1501 & 0 & -7.26041 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -80.4959 & 0 & -80.4959 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.61129 & 2.73199 \\ 0 & 0 \\ 2.73199 & 68.6807 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

Tomando como valores:

$M_1 \rightarrow 3.294kg$
$M_2 \rightarrow 1.795kg$
$r \rightarrow 0.226m$

$e \rightarrow 0.065m$
$J_1 \rightarrow 0.0633 kgm^2$
$J_2 \rightarrow 0.007428 kgm^2$
$g \rightarrow 9.81 \frac{m}{s^2}$
$\alpha \rightarrow 10^o$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema está dada en la formula (65)

$$\begin{bmatrix} \frac{271.16+3.61129s^2}{87.646s^2+s^4} & -1 \\ \frac{-271.16+2.73199s^2}{87.646s^2+s^4} & -1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

Por lo tanto los polos de la función de transferencia son presentados en la expresión (66):

$$p_{1,1}, p_{1,2} = 0; \qquad p_{1,3}, p_{1,4} = 0 \pm 9.36194i$$

$$p_{2,1}, p_{2,2} = 0; \qquad p_{2,3}, p_{2,4} = 0 \pm 9.36194i \tag{66}$$

Tomando en cuenta que existen polos con parte real 0, se considera que el sistema es inestable a lazo abierto y la expresión (67) presenta la matriz de controlabilidad.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.61129 & 2.73199 & 0 & 0 & -45.3551 & -510.608 \\ 3.61129 & 2.73199 & 0 & 0 & -45.3551 & -510.608 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.73199 & 68.6807 & 0 & 0 & -510.608 & -5748.43 \\ 2.73199 & 68.6807 & 0 & 0 & -510.608 & -5748.43 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Ya que el rango de la matriz de controlabilidad es 4, es decir que es de rango completo, el sistema es completamente controlable por lo cual es posible implementar un control realimentado de estados utilizando el método de asignación de polos para lo cual se propone un sistema de segundo orden de la forma dada por la fórmula (68).

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{68}$$

Para calcular los dos primeros polos del sistema se proponen valores deseados para el sobretiro (OS) y el tiempo de asentamiento (T_s) que en este caso son 16% y $2seg.$ respectivamente. Para calcular el factor de amortiguamiento ξ se utiliza la ecuación (69) mientras que con (70)) se puede obtener la frecuencia natural del sistema.

$$\xi = \frac{-\log(OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \log(OS/100)^2}} \tag{69}$$

$$\omega_n = \frac{4}{\xi T_s} \tag{70}$$

Resolviendo (68) se obtienen los primeros polos del sistema, los cuales se presentan en la expresión (71).

$$p_1, p_2 = -2 \pm 3.4286i \tag{71}$$

y proponemos los polos restantes, en este caso -5 y 3 para calcular la matriz de ganancias de realimentación de estados y obtener un sistema estable cuyos polos tengan parte real negativa.

La respuesta del sistema al escalón unitario se presenta en la figura 22 en donde se puede apreciar que la salida alcanza un valor muy cercano al 1, lo cual significa que el control realimentado de estados funciona de forma adecuada ya que está haciendo que el sistema siga la señal de referencia establecida. También se obtuvieron los ángulos y velocidades angulares tanto de la esfera (figura 23) como del péndulo (figura 24).

Figura 22: Respuesta del sistema al escalón unitario

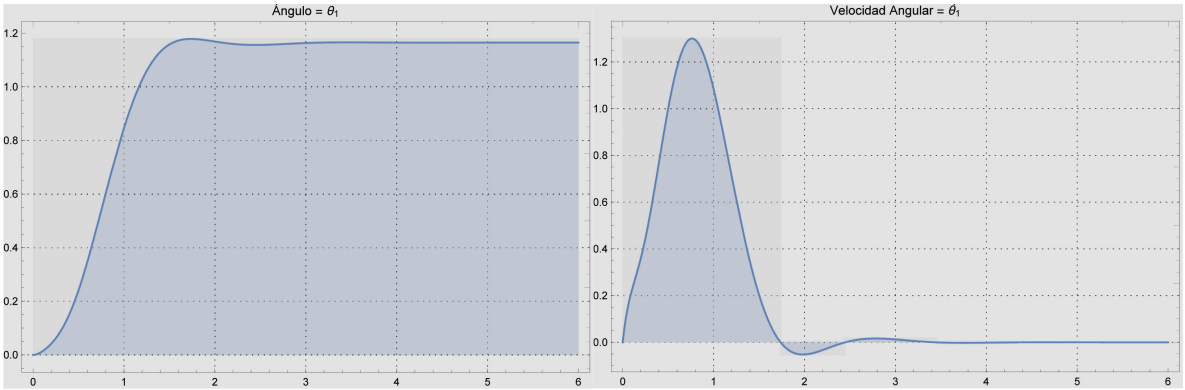


Figura 23: Comportamiento del ángulo θ_1 y velocidad angular $\dot{\theta}_1$

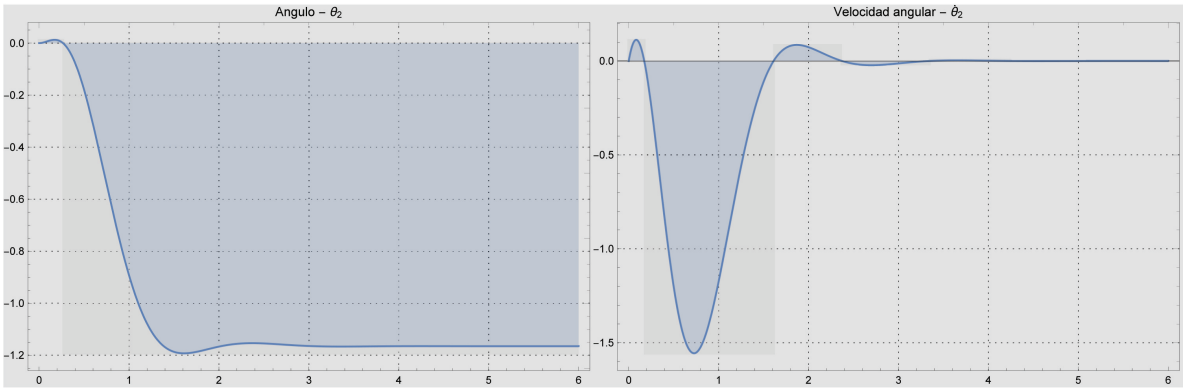


Figura 24: Comportamiento del ángulo θ_2 y velocidad angular $\dot{\theta}_2$

Modelo Roozegar & Mahjoob (2016)

Para el modelo propuesto por Roozegar & Mahjoob (2016) se realizó el mismo procedimiento que para el modelo anterior. A pesar de que en dicho trabajo se desarrollaron controles PID y controles que utilizan lógica difusa, se implementó un control realimentado de estados para observar su comportamiento y compararlo con el modelo de Nagai (2008) y los resultados obtenidos se muestran en esta sección.
En primer lugar se muestra el diagrama que representa el modelo que propone el autor que puede ser apreciado en la figura 25 y las ecuaciones (72) y (73) describen la dinámica del sistema .

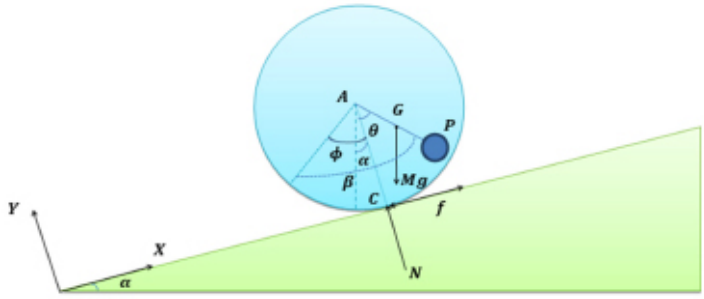


Figura 25: Modelo del robot esférico en un plano inclinado (Roozegar & Mahjoob, 2016)

$$-T + T_f = Mgr_G \sin(\alpha + \theta) + mpr\rho \sin(\theta)\dot{\theta}^2 - (I_c + m_p\rho^2 - m_p r\rho\cos(\theta))\ddot{\beta} + (I_c + m_p(r^2 + \rho^2) - 2m_p r\rho\cos(\theta))\ddot{\theta} \quad (72)$$

$$T = Mg\rho\sin(\alpha) - m_p r\rho\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + (I_c + m_p\rho^2)(\ddot{\beta} - \ddot{\theta}) + m_p r\rho\cos(\theta)\ddot{\theta} \quad (73)$$

Donde:

$\beta\rightarrow$ Rotación del eje del motor a pasos con respecto a la esfera
$\theta\rightarrow$ Ángulo del péndulo con respecto a la vertical
$\alpha\rightarrow$ Ángulo de inclinación del plano inclinado
$Mg\rightarrow$ Fuerza gravitacional
$m_p\rightarrow$ Masa del péndulo
$m_s\rightarrow$ Masa de la esfera
$M\rightarrow$ Masa total del robot $(m_p + m_s)$
$I_c\rightarrow$ Momento de inercia de la esfera alrededor de su centroide
$\rho\rightarrow$ Radio de la esfera
$r\rightarrow$ Radio del péndulo
$r_G\rightarrow$ Radio del centro de masa del robot

La representación en espacio de estados del sistema está dada por los parámetros presentados en la expresión (74)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -81.1226 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -56.4251 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 72.9921 & 50.7699 \\ 0 & 0 \\ 50.7699 & 48.5477 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

con los siguientes valores:

$m_p\rightarrow 0.639kg$

$m_s \rightarrow 0.5kg$
$I_c \rightarrow 0.5kgm^2$
$\rho \rightarrow 0.2m$
$r \rightarrow 0.18m$
$M \rightarrow 1.139m$
$r_G \rightarrow 0.101m$
$g \rightarrow 9.81 \frac{m}{s^2}$
$\alpha \rightarrow 10^o$

La función de transferencia en lazo abierto del robot esférico es la mostrada en la fórmula (75).

$$\begin{bmatrix} \frac{72.9921}{81.1226+s^2} & \frac{50.7699}{81.1226+s^2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{75}$$

Los polos del sistema son:
$p_{1,1}, p_{1,2} = 0 \pm 9.00681i$
$p_{2,1}, p_{2,2} = 0 \pm 9.00681i$

Al igual que en el modelo de Nagai (2008) la parte real de los polos es 0, por lo que el sistema es inestable. La matriz de controlabilidad del sistema se presenta en la expresión (76) la cual tiene rango 4, por lo tanto se tiene que el sistema es completamente controlable.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 72.9921 & 50.7699 & 0 & 0 & -5921.31 & -4118.59 \\ 72.9921 & 50.7699 & 0 & 0 & -5921.31 & -4118.59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50.7699 & 48.5477 & 0 & 0 & -4118.59 & -2864.7 \\ 50.7699 & 48.5477 & 0 & 0 & -4118.59 & -2864.7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{76}$$

Para el diseño del control realimentado de estados se procede del mismo modo que en el caso anterior proponiendo un valor deseado para el sobretiro (15%) y para el tiempo de asentamiento (2 seg). Resolviendo el sistema de segundo orden se pueden obtener los dos primeros polos (77) para posteriormente proponer otro par de polos que

en este caso serán -15 y -8 obteniendo así un sistema que tenga polos con parte real negativa para garantizar la estabilidad del sistema.

$$p_1, p_2 = -2 \pm 3.31196i \tag{77}$$

Al aplicar un escalón unitario se obtienen las gráficas que se muestran en la figura 26 donde se puede apreciar que el ángulo θ se aproxima al valor de referencia del escalón unitario.

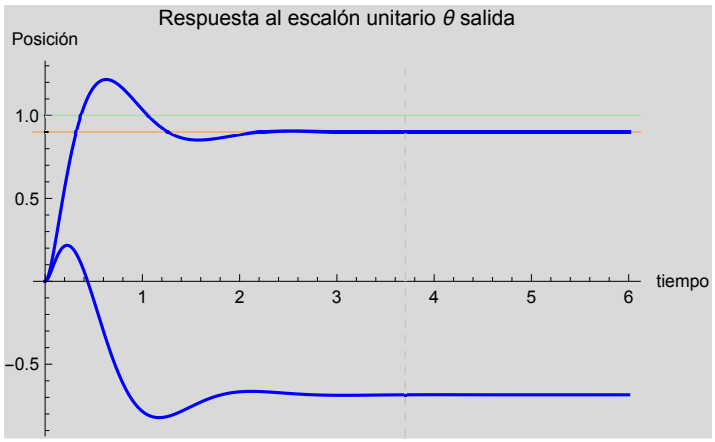


Figura 26: Respuesta del sistema al escalón unitario

El comportamiento de los ángulos se puede observar en las figuras 27 y 28 en las cuales se muestra el ángulo y la velocidad ángular de θ y β, respectivamente.

6 Consideraciones finales

6.1 Conclusiones

Para la realización de esta propuesta doctoral se llevaron a cabo distintas pruebas que permitieron establecer las condiciones bajo las cuales se llevará a cabo la investigación, tales como ángulos máximos de inclinación del plano inclinado dependiendo de las superficies con las cuales se va a trabajar, así como la altura máxima que podrán tener los abultamientos producidos por la deformación de la superficie suave. También se derivó el modelo matemático que describe el comportamiento del sistema que se va a estudiar, el cual es la base para llevar a cabo futuros experimento y desarrollar

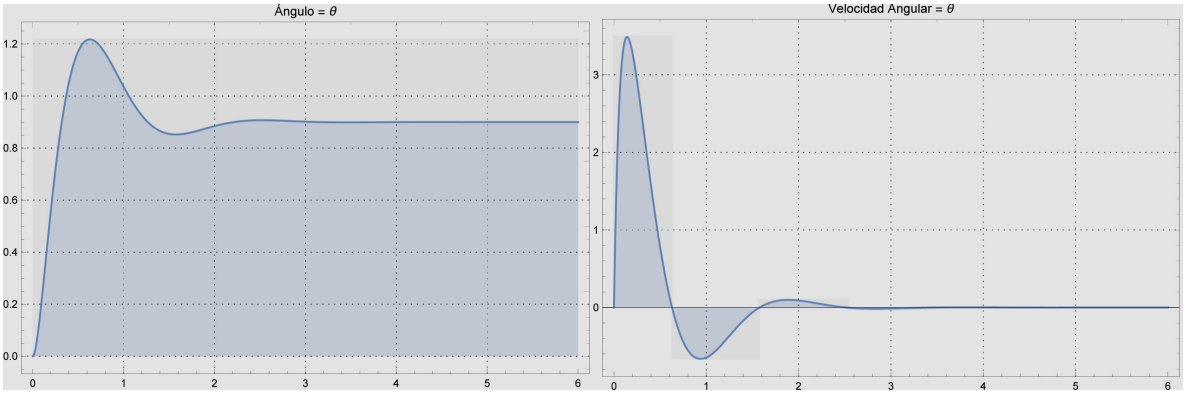


Figura 27: Comportamiento del ángulo θ y velocidad angular $\dot{\theta}$

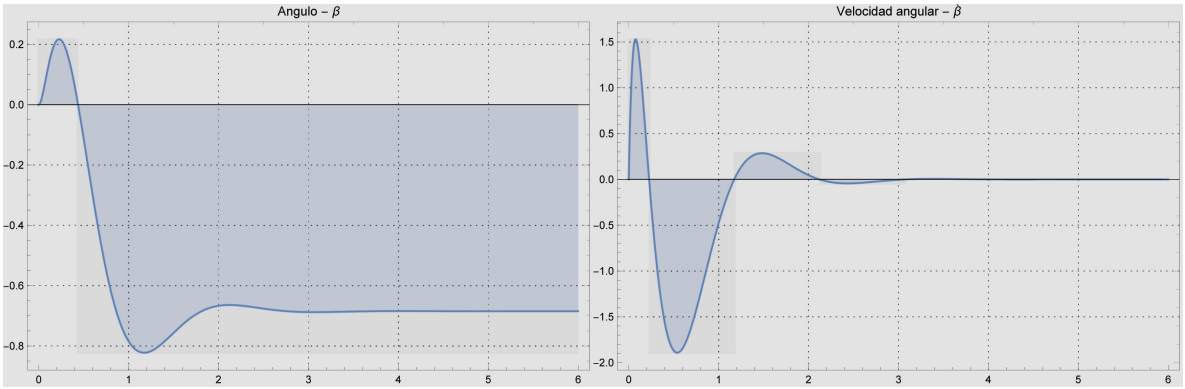


Figura 28: Comportamiento del ángulo β y velocidad angular $\dot{\beta}$

controladores que permitan controlar la posición y la velocidad del robot esférico.
Se han realizado algunas pruebas basadas en modelos propuestos previamnete (Nagai, 2008; Roozegar & Mahjoob, 2016) los cuales han permitido tener un acercamiento que permitió familiarizarse con los robots esféricos impulsados por péndulo. En el caso del primer robot esférico (Nagai, 2008) cabe destacar que, a pesar de que el autor derivó las ecuaciones que describen el movimiento del robot, no se habían aplicado estrategias de control para ese sistema considerando que se desplaza en un plano inclinado. Por lo tanto, el desarrollo del control realimentado de estados ha permitido obtener resultados preliminares que serán de gran utilidad para continuar trabajando en los objetivos de este proyecto.
En el caso del segundo robot esférico (Roozegar & Mahjoob, 2016), al existir trabajo previo desarrollado por el autor, nos permitió comparar sus resultados con los obtenidos al desarrollar un control realimentado de estados.

6.2 Actividades por realizar

Una vez que se cuenta con el modelo que describe la dinámica del robot esférico impulsado por péndulo considerando los abultamientos producidos por el desplazamiento en una superficie suave, el siguiente paso será complementar dicho modelo teniendo en cuenta los planos inclinados variables, lo que permitirá conocer el comportamiento del robot en escenarios reales que tomen en cuenta estas consideraciones que no se han presentado en trabajos previos.
El planteamiento de un buen modelo matemático será fundamental para poder aplicar estrategias de control que permitan que el robot esférico se desplace de forma adecuada en ambientes hostiles que serán simuladas utilizando un ambiente virtual con la finalidad de comprobar los resultados obtenidos. Adicionalmente a las estrategias utilizadas en la presente propuesta, se analizarán diferentes tipos de controladores como controles no lineales, controles adaptativos o controles en modos deslizantes.
De forma paralela al trabajo que se irá realizando, se publicarán los resultados obtenidos con el objetivo de documentar el desarrollo del proyecto de investigación.
Se llevará a cabo un análisis que permita determinar la viabilidad de desarrollar un prototipo físico en función de los tiempos de desarrollo de cada una de las etapas del proyecto.

7 Cronograma de actividades

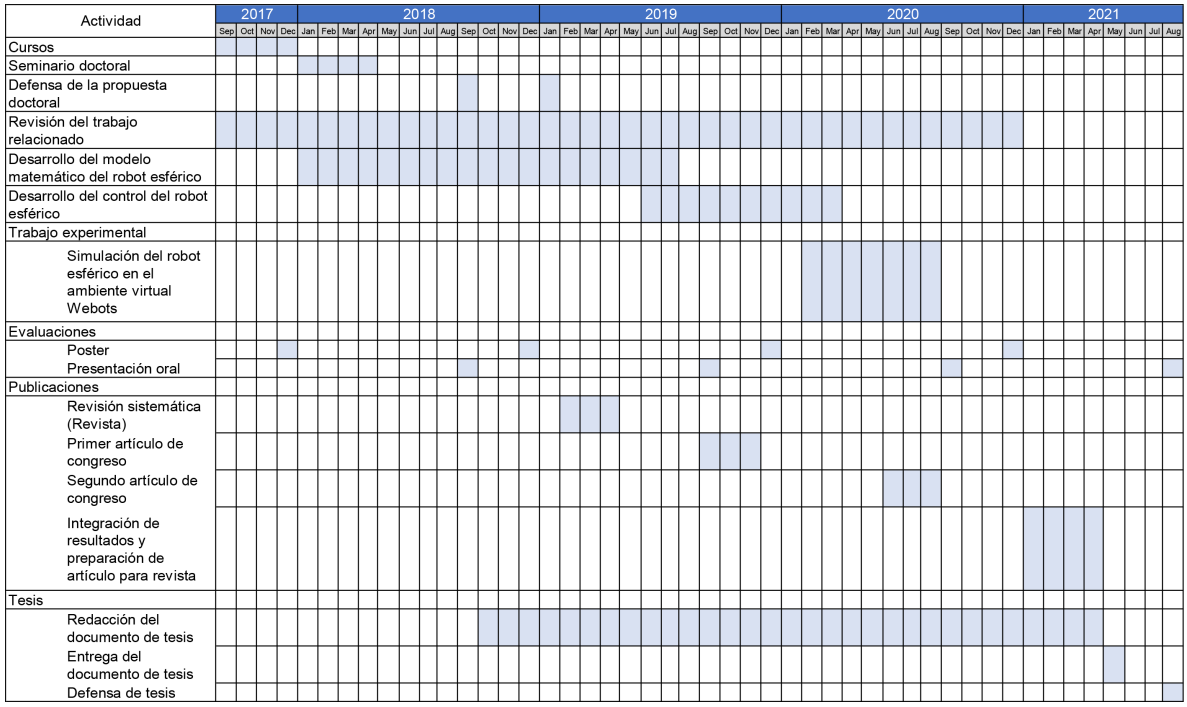


Figura 29: Cronograma de actividades

Bibliografía

Abad-Manterola, P., Edlund, J. A., Burdick, J. W., Wu, A., Oliver, T., Nesnas, I. A., & Cecava, J. (2009). Axel: A minimalist tethered rover for exploration of extreme planetary terrains. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 16(4), 44–52.

Bruhn, F. C., Kratz, H., Warell, J., Lagerkvist, C. I., Kaznov, V., Jones, J. A., & Stenmark, L. (2008). A preliminary design for a spherical inflatable microrover for planetary exploration. *Acta Astronautica*, 63(5-6), 618–631.

CausaDirecta (2013). Tabla de factores de rozamiento del pavimento para neumáticos de goma. https://causadirecta.com/especial/calculo-de-velocidades/tablas/tabla-de-factores-de-rozamiento-del-pavimento-para-neumaticos-de-goma. Fecha de consulta: 22 de diciembre de 2018.

Chau, P. C. (2002). *Process control: a first course with MATLAB*. Cambridge University Press.

González, R., Rodríguez, F., & Guzmán, J. L. (2015). Robots móviles con orugas historia, modelado, localización y control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 12(1), 3 – 12.

Liu, D., Sun, H., & Jia, Q. (2008). Stabilization and path following of a spherical robot. In *Robotics, Automation and Mechatronics, 2008 IEEE Conference on* (pp. 676–682).

Nagai, M. (2008). Control system for a spherical robot. Master's thesis, Department of Space Science, Luleå University, 1653-0187.

Nise, N. S. (2007). *CONTROL SYSTEMS ENGINEERING, (With CD)*. John Wiley & Sons.

Ocampo, J. (2010). Modelo de robot esférico para la locomoción en superficies irregulares. Master's thesis, Computer Science Department, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica.

Ocampo-Jiménez, J., Muñoz-Meléndez, A., & Rodríguez-Gómez, G. (2014). Enhanced locomotion of a spherical robot based on the sea-urchin characteristics. In A. Duff, N. F. Lepora, A. Mura, T. J. Prescott, & P. F. M. J. Verschure (Eds.), *Biomimetic and Biohybrid Systems* (pp. 238–248). Cham: Springer International Publishing.

Ocampo-Jiménez, J., Muñoz-Meléndez, A., & Rodríguez-Gómez, G. (2014). Extending a spherical robot for dealing with irregular surfaces: a sea urchin-like robot. *Advanced Robotics*, 28(22), 1475–1485.

Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*, volume 5. Pearson New Jersey, 7 edition.

Roozegar, M., Ayati, M., & Mahjoob, M. (2017a). Mathematical modelling and control of a nonholonomic spherical robot on a variable-slope inclined plane using terminal sliding mode control. *Nonlinear Dynamics*, 90(2), 971–981.

Roozegar, M., Ayati, M., & Mahjoob, M. J. (2017b). Mathematical modelling and control of a nonholonomic spherical robot on a variable-slope inclined plane using terminal sliding mode control. *Nonlinear Dynamics*, 90(2), 971–981.

Roozegar, M. & Mahjoob, M. J. (2016). Modelling and control of a non-holonomic pendulum-driven spherical robot moving on an inclined plane: simulation and experimental results. *IET Control Theory & Applications*, 11(4), 541–549.

Schroll, G. C. (2008). *Design of a spherical vehicle with flywheel momentum storage for high torque capabilities*. Bachelor's thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.

Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot modeling and control*, volume 3. Wiley New York.

Tzafestas, S. G. (2013). *Introduction to mobile robot control*. Elsevier.

Yu, T., Sun, H., Jia, Q., Zhang, Y., & Zhao, W. (2013). Stabilization and control of a spherical robot on an inclined plane. *Res. J. Appl. Sci. Eng. Technol*, 5(6), 2289–2296.

Yu, T., Sun, H., & Zhang, Y. (2011). Dynamic analysis of a spherical mobile robot in rough terrains. In *Sensors and Systems for Space Applications IV*, volume 8044 (pp. 80440V).: International Society for Optics and Photonics.